

Όνομα

Επώνυμο

Ημερομηνία

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο αριθμός $-x$ είναι αρνητικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $(1 - \alpha)(1 - \beta) > 0$.

γ) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$

δ) $x^2 \in [0, +\infty)$

ε) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

στ) Εάν $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

ζ) $\frac{\alpha+\beta}{2} \in [\alpha, \beta]$

(Μονάδες 21)

β) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα παρακάτω σύνολα:

i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 5\}$

iii) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -6\}$

iv) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 0\}$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 2

Αν ισχύει $1 < x < 3$ και $2 < y < 3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $x + y$ *β)* $4x + 2y$ *γ)* $y - x$ *δ)* xy *ε)* $\frac{x}{y}$ *στ)* $y^2 + x^2$

(Μονάδες 2, 4, 5, 4, 5, 5)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω α , β , γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$$

(Μονάδες 5)

β) να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$$

(Μονάδες 8)

Αν επιπλέον ισχύει ότι $0 < \alpha < 1$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 6)

δ) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 6)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Ο αριθμός $-x$ είναι αρνητικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $\alpha < 1 < \beta$ τότε $(1 - \alpha)(1 - \beta) > 0$.

iii) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$

iv) $x^2 \in [0, +\infty)$

v) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

vi) Εάν $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

vii) $\frac{\alpha+\beta}{2} \in [\alpha, \beta]$

(Μονάδες 21)

β) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα παρακάτω σύνολα:

i) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 5\}$

iii) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -6\}$

iv) $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 0\}$

(Μονάδες 4)

Λύση

α)

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

στ) Σωστό

ζ) Σωστό

β)

i) $x \in (-\infty, 5)$

$$\text{ii) } x \in (-6, 5)$$

$$\text{iii) } x \in [-6, +\infty)$$

$$\text{iv) } x \in [-3, 0)$$

ΘΕΜΑ Β

Αν ισχύει $1 < x < 3$ και $2 < y < 3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$$\alpha) x + y \quad \beta) 4x + 2y \quad \gamma) y - x \quad \delta) xy \quad \epsilon) \frac{x}{y} \quad \sigma\tau) y^2 + x^2$$

(Μονάδες 2, 4, 5, 4, 5, 5)

Λύση

$\alpha)$ Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων

$1 < x < 3$ και $2 < y < 3$ έχουμε :

$$\begin{array}{r} 1 < x < 3 \\ 2 < y < 3 (+) \\ \hline 3 \leq x + y \leq 6 \end{array}$$

$\beta)$ Είναι $1 < x < 3 \Leftrightarrow 4 < 4x < 12$ (1) και

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow 4 < 2y < 6 \text{ (2)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{array}{r} 4 < 4x < 12 \\ 4 < 2y < 6 (+) \\ \hline 8 \leq 4x + 2y \leq 18 \end{array}$$

$\gamma)$ Είναι $2 < y < 3$ (1) και

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow -1 > -x > -3 \Leftrightarrow -3 < -x < -1 \text{ (2) .}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$$\begin{array}{r} 2 < y < 3 \\ -3 < -x < -1 (+) \\ \hline -1 < y - x \leq 2 \end{array}$$

δ) Παρατηρώ ότι όλα τα μέλη είναι θετικά , ισχύει
 $0 < 1 < x < 3$ και $0 < 2 < y < 3$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη

$$\begin{array}{r} 1 < x < 3 \\ 2 < y < 3 \quad (\cdot) \\ \hline 2 < x \cdot y < 9 \end{array}$$

ε) Ισχύει $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, οπότε είναι $1 < x < 3$ (1) και

$2 < y < 3$ επειδή όλα τα μέλη είναι θετικοί αριθμοί άρα και ορόσημοι , τότε

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \quad (2)$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2)

$$\begin{array}{r} 1 < x < 3 \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \quad (\cdot) \\ \hline \frac{1}{3} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2} \end{array}$$

στ) Είναι $2 < y < 3 \Leftrightarrow 2^2 < y^2 < 3^2 \Leftrightarrow 4 < y^2 < 9$ (1) και $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1^2 < x^2 < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 9$ (2) .

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$$\begin{array}{r} 4 < y^2 < 9 \\ 1 < x^2 < 9 \quad (+) \\ \hline 5 \leq y^2 + x^2 \leq 9 \end{array}$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}.$

(Μονάδες 8)

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = \alpha^2(\alpha + 2) + 9(\alpha + 2) = (\alpha + 2)(\alpha^2 + 9)$$

που είναι το ζητούμενο.

β) i. Ισχύει: $\alpha^2 + 2\alpha = \alpha(\alpha + 2)$, οπότε με $\alpha > 0$ έχουμε:

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

ii. Επειδή $\alpha > 0$ για την απόδειξη της $A \geq 6$, δηλαδή της $\frac{\alpha^2 + 9}{\alpha} \geq 6$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$, ή αρκεί $\alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0$, που ισχύει αφού προκύπτει από την προφανή ανισότητα $(\alpha - 3)^2 \geq 0$.

Η ισότητα $A = 6$ ισχύει μόνο όταν $(\alpha - 3)^2 = 0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha = 3$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$$

(Μονάδες 5)

β) να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$$

(Μονάδες 8)

Αν επιπλέον ισχύει ότι $0 < \alpha < 1$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες
6)

δ) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma = -\alpha$, οπότε,

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha^2}{-\alpha} = -\alpha$$

β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α) ισχύουν:

$$\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} = -\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = -\gamma$$

Οπότε,

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = -\alpha - \beta - \gamma = -(\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

γ) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 & \stackrel{\cdot \alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^3 < \alpha^2 & \quad (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 1 & \stackrel{\cdot \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^2 < \alpha & \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha$.

δ) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1.$$

Τελικά $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.